

## SOLUTIONS A HODOGRAPHE LINEAIRE DES EQUATIONS DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UN MILIEU POREUX

BERNARD LE FUR

Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, France

(Reçu le 6 janvier 1981 et sous forme modifiée le 27 avril 1981)

**Résumé**—Lorsqu'on suppose que la vitesse de filtration dans un milieu poreux avec convection naturelle est fonction seulement d'un paramètre (hodographe linéaire) les surfaces isovitesses sont soit des plans parallèles soit des cylindres à génératrices verticales. Ceci permet d'obtenir, par exemple, des solutions particulières dans le cas d'une couche inclinée ou horizontale à parois imperméables ou isobares avec certaines conditions thermiques.

### NOMENCLATURE

#### Symboles latins

- $c$ , chaleur spécifique du fluide saturant ;
- $g$ , accélération de la pesanteur ;
- $G_r$ , nombre sans dimensions ;
- $H$ , longueur de référence (par exemple, épaisseur de la couche perméable) ;
- $k$ , perméabilité du milieu poreux ;
- $\mathbf{n}$ , vecteur normal unitaire ;
- $p$ , pression statique ;
- $\hat{p}$ , pression motrice ;
- $Pe^*$ , nombre de Péclet de filtration ;
- $r$ , distance radiale ;
- $Ra^*$ , nombre de Rayleigh de filtration ;
- $T$ , température ;
- $T_M$ , température moyenne arithmétique ;
- $\Delta T_b$ , différence de température de base ;
- $\Delta T_p$ , différence de température pariétale ;
- $\mathbf{U}$ , vitesse de filtration ;
- $\mathbf{U}_b$ , vitesse de base ;
- $\mathbf{U}_m$ , vitesse de filtration moyenne ;
- $x, y, z$ , coordonnées cartésiennes (avec l'axe des  $z$  vertical) ;
- $X, Y, Z$ , coordonnées cartésiennes (avec l'axe des  $X$  incliné d'un angle  $\varphi$  sur l'horizontale) ;
- $X', Y', Z'$ , coordonnées cartésiennes (avec l'axe des  $X'$  incliné d'un angle  $\psi$  sur l'horizontale).

#### Symboles grecs

- $\lambda^*$ , conductivité thermique du milieu poreux ;
- $\mu$ , viscosité du fluide saturant ;
- $\varpi$ , paramètre sans dimensions ;
- $\rho$ , masse volumique du fluide saturant ;
- $\phi$ , angle avec l'horizontale des plans iso- $\varpi$  et de la couche perméable à parois imperméables ;
- $\chi$ , coefficient de dilatation du fluide saturant ;
- $\psi$ , angle avec l'horizontale de la couche perméable à parois isobares.

#### Indices inférieurs

- $m$ , conditions moyennes ;
- $o$ , conditions thermodynamiques de référence ; ou bien, conditions en un endroit déterminé ( $X = 0$ ) ;
- $p$ , conditions aux parois ;
- $r$ , grandeurs réelles (les grandeurs adimensionnelles n'ont pas cet indice) ;
- $x, y, z$ , composantes le long des axes du trièdre  $Oxyz$ .

#### Indices supérieurs

- $+$ , conditions à la paroi supérieure de la couche perméable ;
- $-$ , conditions à la paroi inférieure de la couche perméable.

### I. EQUATIONS GENERALES

#### 1. INTRODUCTION

DES SOLUTIONS particulières des équations de la convection naturelle dans un milieu poreux ont déjà été obtenues dans le cas d'une couche perméable inclinée à parois isothermes [1] et dans celui d'une couche perméable horizontale avec des gradients de température pariétale uniformes et égaux [2]. Dans ces deux cas, les surfaces isovitesses sont des plans parallèles et l'hodographe est linéaire. On présente ici une méthode analogue à celle utilisée pour l'intégration des équations de Navier-Stokes [3], et permettant d'obtenir un grand nombre de solutions particulières correspondant toutes à l'hypothèse de l'hodographe linéaire.

#### 2. EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE

L'équation de conservation de la masse pour un écoulement permanent s'écrit avec l'hypothèse de Bousinesq (masse volumique constante sauf dans la force volumique) :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{rx}}{\partial x_r} + \frac{\partial \mathbf{U}_{ry}}{\partial y_r} + \frac{\partial \mathbf{U}_{rz}}{\partial z_r} = 0, \quad (2.1)$$

où  $U_r$  est la vitesse de filtration dans le milieu poreux qui dépend des coordonnées cartésiennes  $x_r$ ,  $y_r$  et  $z_r$ , l'indice inférieur  $r$  désignant les grandeurs réelles par opposition aux grandeurs adimensionnelles qui sont sans cet indice.

Si nous introduisons une longueur de référence  $H$  et une vitesse de référence (ou de base)  $U_b$ , on pourra mettre l'équation (2.1) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

avec la vitesse adimensionnelle :

$$U = U_r/U_b, \quad (2.3)$$

et les coordonnées adimensionnelles :

$$x = x_r/H, \quad y = y_r/H \quad \text{et} \quad z = z_r/H. \quad (2.4)$$

### 3. EQUATION DE DARCY

Dans un milieu poreux homogène et isotrope, la loi de Darcy s'écrit sous la forme :

$$U_r = -\frac{k}{\mu} (\nabla_r p_r - \rho_r g). \quad (3.1)$$

Avec l'hypothèse de Boussinesq, on aura :

$$U_r = -\frac{\rho_o \chi_o k}{\mu_o} (T_r - T_o) g - \frac{k}{\mu_o} \nabla_r \hat{p}_r, \quad (3.2)$$

où  $T_r$  est la température (réelle) et où :

$$\hat{p}_r = p_r + \rho_o g z_r, \quad (3.3)$$

est la pression motrice que l'on aurait si la masse volumique du fluide saturant était uniforme et égale à  $\rho_o$ .

Dans l'équation (3.1),  $g$  est le vecteur accélération de la pesanteur et  $k$  est la perméabilité du milieu poreux.

On a supposé que la masse volumique  $\rho_r$  ne dépendait que de la température  $T_r$  (compressibilité négligeable devant la dilatation) et de façon linéaire avec un coefficient de dilatation  $\chi_o = -\rho_o^{-1}(\partial \rho_r / \partial T_r)_p$ . En outre, l'hypothèse de Boussinesq nous impose une viscosité uniforme et égale à  $\mu_o$ .

On voit donc, d'après l'équation (3.2), que les deux vecteurs  $U_r$  et  $\nabla_r \hat{p}_r$  sont dans un même plan vertical.

Prenons comme température adimensionnelle :

$$T = (T_r - T_o) / \Delta T_b, \quad (3.4)$$

où  $\Delta T_b$  est une différence de température de référence (ou de base); et comme pression motrice adimensionnelle :

$$\hat{p} = k \hat{p}_r / \mu_o U_b H. \quad (3.5)$$

L'équation de Darcy (3.2) devient alors en tenant compte de (2.3) et de (2.4) :

$$U = \frac{Ra^*}{Pe^*} T z - \nabla \hat{p}, \quad (3.6)$$

avec deux nombres sans dimensions: le nombre de Rayleigh du milieu poreux :

$$Ra^* = g H k \rho_o^2 c_o \chi_o \Delta T_b / \mu_o \lambda_o^*, \quad (3.7)$$

et le nombre de Péclet de filtration :

$$Pe^* = \rho_o c_o U_b H / \lambda_o^*. \quad (3.8)$$

En prenant le rotationnel de la loi de Darcy sous la forme (3.6), on élimine la pression motrice adimensionnelle et l'on obtient :

$$\nabla U = \frac{Ra^*}{Pe^*} \nabla T \times z. \quad (3.9)$$

## 4. EQUATION DE LA CHALEUR

En régime permanent, l'équation de la chaleur s'écrit avec un terme de convection qui correspond à la dérivée particulaire de l'enthalpie du fluide saturant :

$$\lambda_o^* \nabla_r^2 T_r - \rho_o c_o U_r \cdot \nabla_r T_r = 0, \quad (4.1)$$

où  $\lambda_o^*$  est la conductivité thermique du milieu poreux supposée constante et où  $c_o$  est la chaleur spécifique du fluide saturant supposée également constante.

Cette équation se met sous forme adimensionnelle en faisant apparaître le nombre de Péclet de filtration :

$$\nabla^2 T - Pe^* U \cdot \nabla T = 0. \quad (4.2)$$

## 5. SOLUTIONS PARTICULIERES

Si l'hodographe, au lieu de correspondre à un domaine de l'espace des vitesses, dégénère en une courbe, ou *hodographe linéaire*, on aura des solutions particulières pour lesquelles les équations précédentes se simplifient. On montrera, au Chapitre II, que les surfaces sur lesquelles le vecteur vitesse reste constant sont, ou bien, des plans parallèles, ou bien, des cylindres à génératrices verticales.

## II. SOLUTIONS A HODOGRAPHE LINEAIRE

### 1. EQUATIONS TRANSFORMEES

Si nous supposons que la vitesse de filtration adimensionnelle ne dépend que d'un seul paramètre  $\varpi$  ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), c'est-à-dire :

$$U = f(\varpi), \quad (1.1)$$

l'équation (2.2) du Chapitre I devient :

$$\nabla \varpi \cdot f' \equiv f'_x \frac{\partial \varpi}{\partial x} + f'_y \frac{\partial \varpi}{\partial y} + f'_z \frac{\partial \varpi}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Le vecteur  $f'(\varpi)$  est donc un vecteur tangent à la surface iso- $\varpi$  passant par le point considéré.

Les surfaces iso- $\varpi$  ne peuvent pas être quelconques, en effet les lignes caractéristiques de l'équation (1.2) obéissent au système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} = \frac{dz}{f'_z}. \quad (1.3)$$

Comme dans l'article de Le Fur [3] qui traite des équations de Navier-Stokes, on voit que, sur une surface iso- $\varpi$  les lignes caractéristiques sont des

droites parallèles au vecteur  $f'(\varpi)$ . Les surfaces iso- $\varpi$  sont donc des cylindres dont les génératrices sont des lignes caractéristiques.

Il ne peut y avoir, pour une solution sans singularités, qu'une seule valeur du vecteur vitesse  $\mathbf{U}$  en chaque point. Les surfaces iso- $\varpi$  ne doivent donc pas se couper et seront :

(a) ou bien des *plans parallèles*, auquel cas l'hodographe est une courbe plane ;

(b) ou bien des *cylindres* dont les génératrices sont toutes parallèles entre elles. Dans ce cas, l'hodographe est une droite ou un segment de droite.

L'équation (3.9) du Chapitre I devient :

$$\nabla \varpi \times f'(\varpi) = \frac{Ra^*}{Pe^*} \nabla T \times \mathbf{z}. \quad (1.4)$$

On voit donc que les trois vecteurs  $\nabla \varpi$ ,  $f'(\varpi)$  et  $\nabla T$  sont dans le même plan vertical.

## 2. CAS DES PLANS PARALLELES ISO- $\varpi$

### 2.1. Description des solutions dans $R^3$

2.1.1. *Plans inclinés*. Dans le cas où les surfaces  $\varpi = C^e$  sont des plans parallèles inclinés ( $0 < \varphi \leq \pi/2$ ), nous pouvons prendre de nouvelles coordonnées  $X$  et  $Z$  (Fig. 1) de telle façon que :

$$\begin{aligned} x &= X \cos \varphi - Z \sin \varphi, \\ z &= X \sin \varphi + Z \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le vecteur vitesse de filtration sera alors de la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}F(Z) + \mathbf{Y}C^e, \quad (2.2)$$

en supposant, pour simplifier,  $U_z = 0$ .

L'équation (1.4) se simplifie :

$$|f'(\varpi)| d\varpi/dZ = F'(Z) = -\frac{Ra^*}{Pe^*} (\partial T/\partial x)_z. \quad (2.3)$$

En intégrant (2.3) par rapport à  $x$ , on aura :

$$\int F'(Z) dx = -\frac{Ra^*}{Pe^*} T(x, z) + G(z), \quad (2.4)$$

où  $G(z)$  est une fonction indéterminée pour le moment ; d'où :

$$-F(Z)/\sin \varphi = -\frac{Ra^*}{Pe^*} T(x, z) + G(z), \quad (2.5)$$

c'est-à-dire :

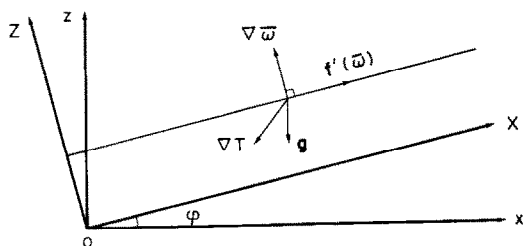


FIG. 1. Plans iso- $\varpi$  inclinés.

$$T(x, z) = \frac{Pe^*}{Ra^*} \{ [F(Z)/\sin \varphi] + G(z) \}. \quad (2.6)$$

Comme  $\partial T/\partial Y = 0$ , l'équation de la chaleur (4.2) du Chapitre I s'écrit :

$$\partial^2 T/\partial X^2 + \partial^2 T/\partial Z^2 - Pe^* F(Z) \partial T/\partial X = 0, \quad (2.7)$$

ou bien encore :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - Pe^* F(Z) \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Remplaçons dans l'équation (2.8) la température  $T(x, z)$  par son expression (2.6). On obtient alors :

$$\begin{aligned} -\sin \varphi F'' - \cot \varphi \cos \varphi F'' - G'' - Pe^* F \\ \times (\cos \varphi F' - \cos \varphi F' - \sin \varphi G') = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

que l'on simplifie ainsi :

$$-(F''/\sin \varphi) - G'' + Pe^* \sin \varphi \cdot FG' = 0, \quad (2.10)$$

ou encore :

$$F'' + G'' \sin \varphi - Pe^* \sin^2 \varphi FG' = 0. \quad (2.11)$$

Une fois cette équation aux dérivées partielles intégrée (voir Annexe) on pourra déterminer le champ de pression motrice  $\hat{p}(x, z)$  ou  $\hat{p}(X, Z)$ . Pour cela, on utilisera l'équation de Darcy sous la forme (3.6) du Chapitre I :

$$\nabla \hat{p} = \mathbf{X}G(z) \sin \varphi + \mathbf{Z} \cos \varphi [ (F(Z)/\sin \varphi) + G(z) ], \quad (2.12)$$

car le vecteur unitaire  $\mathbf{z}$  s'écrit :

$$\mathbf{z} = \mathbf{X} \sin \varphi + \mathbf{Z} \cos \varphi. \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Plans horizontaux. Voir Annexe.

2.1.3. *Conditions aux limites*. Les solutions particulières présentées ici sont valables dans tout l'espace, mais elles permettent aussi de découvrir certaines solutions des équations de la convection naturelle dans un domaine particulier. Pour cela, on s'impose sur les frontières du domaine, soit des conditions dynamiques (distributions de  $\mathbf{U}$  ou de  $\hat{P}$  imposées), soit des conditions thermiques (distributions de températures ou de densités de flux de chaleur normales imposées).

Du point de vue dynamique, les conditions aux limites les plus couramment considérées sont :

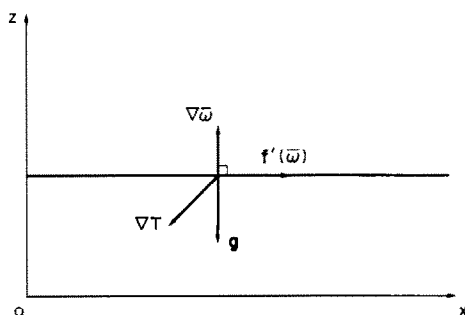


FIG. 2. Plans iso- $\varpi$  horizontaux.

(a) la frontière imperméable ( $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$ );

(b) et la frontière isobare, c'est-à-dire au contact d'un réservoir contenant le fluide saturant le milieu poreux ( $\tilde{P} = C^{te}$ ).

## 2.2. Couche à frontières imperméables planes parallèles

Dans l'isolation thermique, on utilise des couches de matériau isolant constitué par un milieu perméable (granulés ou fibres) dont les parois sont rendues imperméables. En géologie, l'on rencontre également des couches perméables en contact avec des massifs de perméabilité extrêmement plus faible.

2.2.1. *Couche inclinée.* Sur la paroi inférieure ( $Z_r = -H/2$ ) de cette couche inclinée, on aura une certaine distribution de température pariétale  $T_{pr}^-(X_r)$  et sur la paroi supérieure ( $Z_r = H/2$ ), on aura une autre distribution  $T_{pr}^+(X_r)$ .

On choisira donc comme différence de température de référence :

$$\Delta T_{pr}(X_r) = T_{pr}^+ - T_{pr}^- \quad (2.14)$$

### 2.2.1.1. Première solution.

Si ces distributions de température pariétale sont des *fonctions linéaires* de  $X$ , on aura quatre grandeurs caractéristiques, c'est-à-dire :

$$T_p^- = T_p'^+, \quad T_{po}^- = T_p^-(0), \quad T_{po}^+ = T_p^+(0), \quad (2.15)$$

ainsi que la vitesse de filtration moyenne :

$$U_m = \int_{-1/2}^{1/2} U_x dZ. \quad (2.16)$$

Lorsque le gradient de température pariétale est *négatif*, on pourra, à partir des quatre grandeurs (2.15) et (2.16), déterminer les quatre constantes ( $A_+$ ,  $A_-$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) de la solution  $T(x, z)$  donnée par les formules (2.6), (A.1) et (A.3). Cette détermination se fait de façon unique, le déterminant du système linéaire correspondant étant toujours positif.

Les expressions des quatre constantes sont donc :

$$A_+ = (\Delta T_p \sin \varphi + \tilde{r} U_m - T_p'/\cos \varphi)/4sh(\tilde{r}/2), \quad (2.17)$$

$$A_- = (-\Delta T_p \sin \varphi + \tilde{r} U_m + T_p'/\cos \varphi)/4sh(\tilde{r}/2), \quad (2.18)$$

$$\alpha = Ra^* T_p'/Pe^* \sin \varphi, \quad (2.19)$$

$$\beta = [4T_p - \tilde{r}ch(\tilde{r}/2)U_m/2 \sin \varphi]/4sh(\tilde{r}/2), \quad (2.20)$$

dans lesquelles la différence de température pariétale  $\Delta T_p$  est indépendante de l'abscisse  $X$ , et où  $T_M$  est la température moyenne arithmétique pour  $X = 0$  :

$$T_M = (T_{po}^+ + T_{po}^-)/2. \quad (2.21)$$

Dans les formules (2.17) à (2.20), on trouve l'argument sans dimensions  $\tilde{r}$  qui s'écrit d'après (A.4) et (2.19) :

$$\tilde{r} = (G_i Ra_p^* \sin \varphi)^{1/2}, \quad (2.22)$$

où  $G_i$  est un nouveau nombre sans dimensions :

$$G_i = T_p'/\Delta T_p \quad (2.23)$$

Lorsque le gradient de température pariétale est *positif*, il faudra écrire la fonction  $F(Z)$  sous la forme :

$$F(Z) = \tilde{p} \sin \tilde{t}Z + \tilde{q} \cos \tilde{t}Z. \quad (2.24)$$

On a donc :

$$T_{po}^+ = \frac{Pe^*}{Ra^*} \left[ \left( \tilde{p} \sin \frac{\tilde{t}}{2} + \tilde{q} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right) \sin \varphi + \alpha \cos \frac{\varphi}{2} + \beta \right], \quad (2.25)$$

et :

$$T_{po}^- = \frac{Pe^*}{Ra^*} \left[ \left( -\tilde{p} \sin \frac{\tilde{t}}{2} + \tilde{q} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right) \sin \varphi - \alpha \cos \frac{\varphi}{2} + \beta \right]. \quad (2.26)$$

D'après (2.16), la vitesse moyenne dans la couche sera :

$$U_m = 2\tilde{q} \sin(\tilde{t}/2)/\tilde{t}. \quad (2.27)$$

La constante  $\alpha$  étant donnée par la formule (2.19), les trois constantes  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{q}$  et  $\beta$  obéissent au système linéaire des trois équations (2.25), (2.26) et (2.27).

Si  $\sin(\tilde{t}/2) \neq 0$ , on aura :

$$\tilde{p} = Ra^* (\sin \varphi \Delta T_p - \cos \varphi T_p')/2Pe^* \sin(\tilde{t}/2), \quad (2.28)$$

$$\tilde{q} = \tilde{t} U_m/2 \sin(\tilde{t}/2), \quad (2.29)$$

$$\beta = Ra^* T_M/Pe^* - \tilde{t} \cot(\tilde{t}/2) U_m/2 \sin \varphi. \quad (2.30)$$

Si  $\sin(\tilde{t}/2) = 0$ , c'est-à-dire lorsque :

$$G_i Ra^* = -4n^2\pi^2/\sin \varphi, \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (2.31)$$

le déterminant du système des ces trois équations s'annule. On voit que l'on doit avoir :

$$U_m = 0 \quad (n \neq 0) \quad \text{et} \quad \Delta T_p = T_p' \cot \varphi, \quad (2.32)$$

d'où :

$$G_i = tg \varphi \quad \text{et} \quad Ra^* = -4n^2\pi^2 \cos \varphi/\sin^2 \varphi. \quad (2.33)$$

La constante  $\tilde{p}$  est indéterminée, mais les constantes  $\tilde{q}$  et  $\beta$  seront liées par la formule suivante :

$$\beta + (\tilde{q}/\sin \varphi) = Ra^* T_M/Pe^*. \quad (2.34)$$

Lorsque  $n = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $G_i = 0$  et/ou  $Ra^* = 0$ , la constante  $\tilde{q}$  sera égale à la vitesse de filtration moyenne  $U_m$ .

Lorsque les parois sont *isothermes* ( $T_{po}^- = T_{po}^+ = 0$ ), la constante  $\alpha$  sera nulle et les trois constantes  $B_1$ ,  $B_2$  et  $\beta$  de la formule (A.12) seront déterminées de façon unique :

$$B_1 = Ra^* \sin \varphi \Delta T_p/Pe^*, \quad (2.35)$$

$$B_2 = U_m, \quad (2.36)$$

$$\beta = -U_m/\sin \varphi + Ra^* T_M/Pe^*. \quad (2.37)$$

Comme le produit scalaire  $\mathbf{U} \cdot \nabla T$  est alors nul, on se trouve dans un régime qu'on peut appeler 'pseudo-conduction', puisque, malgré l'existence d'un champ

de vitesse de filtration, le champ de température est le même que si l'on avait simplement de la conduction thermique.

Si de plus, la vitesse de filtration moyenne  $U_m$  est nulle (convection naturelle pure), le gradient de température sera uniforme et perpendiculaire aux parois de la couche. L'écoulement avec distribution linéaire de vitesse correspond à un tourbillon unicellulaire dans une couche perméable infiniment allongée. C'est un cas qui a déjà été examiné par Bories et Combarnous [1].

### 2.2.1.2. Seconde solution.

Si les distributions de température pariétale sont des fonctions exponentielles de l'abscisse  $X$ , on déterminera, à partir des trois grandeurs caractéristiques  $T_{po}^-$ ,  $T_{po}^+$  et  $T_{po}'$ , les trois constantes  $C$ ,  $D$  et  $\delta$  de la solution  $T(X, Z)$  donnée par la formule (A.17). Cette détermination se fait de façon unique, le déterminant correspondant n'étant jamais nul.

L'écoulement est alors uniforme et parallèle aux parois de la couche et le gradient de température est vertical mais non uniforme.

**2.2.2. Couche horizontale.** Dans le cas de la couche horizontale, pour que les champs de vitesse et de température correspondent à la solution exposée au paragraphe A.2 de l'annexe, il faut que les distributions pariétales soient des fonctions linéaires de  $x$ .

On dispose alors de cinq grandeurs  $T_{po}^-$ ,  $T_{po}^+$ ,  $T_{po}'$ ,  $T_{po}''$  et  $U_m$  à partir desquelles on peut déterminer de façon unique les cinq constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  de la solution  $T(x, z)$  donnée par la formule (A.30) de l'annexe.

Remarquons que si nous avons les égalités:

$$T_{po}^- = T_{po}^+ \quad \text{et} \quad U_m = 0, \quad (2.38)$$

on retombera sur le cas déjà examiné par Weber [2] d'une couche horizontale avec des gradients de température pariétale uniformes et égaux.

### 2.3. Couche à frontières isobares planes parallèles

Nous allons chercher à présent les solutions correspondant à des conditions thermiques imposées sur deux frontières isobares, c'est-à-dire sur lesquelles la pression motrice  $\hat{p}$  est uniforme. Cela se présente pour des parois en contact avec des réservoirs contenant du fluide saturant à la température  $T_o$  ou avec des massifs perméables dont la perméabilité est extrêmement plus grande que celle du domaine perméable étudié. Remarquons que la pression motrice  $\hat{p}$  est continue de part et d'autre des parois de ce domaine, tandis que la température pariétale  $T_p$  peut être différente de celle du réservoir qui touche la paroi.

Dans le cas général, les frontières isobares obtenues en partant des expressions de la pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$  données par les formules (A.6), (A.10), (A.13), (A.18), (A.21) et (A.32) ne sont pas planes.

Dans les applications pratiques, les frontières isobares sont en général planes. Il faudra donc déterminer les relations nécessaires entre les constantes des diffé-

rentes solutions exposées dans l'annexe pour qu'il en soit ainsi.

Lorsqu'un milieu poreux est limité par deux frontières planes parallèles isobares, l'inclinaison des plans iso- $\varpi$  sera alors déterminée par les conditions aux limites.

**2.3.1. Couche inclinée.** Lorsque la couche perméable est inclinée d'un angle  $\psi$  sur l'horizontale, les solutions correspondant à l'hypothèse d'un hodographe linéaire peuvent être classées en deux groupes.

**2.3.1.1.** Si les températures pariétales  $T_{pr}^+$  et  $T_{pr}^-$  sont égales et différentes de la température de référence  $T_o$ , le champ de température sera uniforme de même que la vitesse de filtration  $U_x$  qui sera inclinée sur l'horizontale d'un angle  $\varphi$  (Fig. 3). Cette vitesse et cet angle sont donnés par les relations suivantes:

$$\frac{Ra^*}{Pe^*} T_p \sin \psi \sin \varphi = U_x [\sin \psi - \cos \varphi \cdot \sin(\psi - \varphi)] \quad (2.39)$$

et:

$$\hat{p}^+ - \hat{p}^- = \frac{Ra^*}{Pe^*} T_p \cos \psi + U_x \sin(\psi - \varphi). \quad (2.40)$$

Si les températures pariétales sont égales à  $T_o$ , la vitesse de filtration  $U$  sera uniforme et parallèle aux parois.

**2.3.1.2.** Si les températures pariétales sont uniformes mais inégales, la vitesse de filtration  $U$  sera alors parallèle aux parois et fonction linéaire de  $Z' = Z$ . La température  $T$  sera également une fonction linéaire de  $Z'$ . On se trouvera alors en régime de pseudo-conduction.

**2.3.2. Couche horizontale.** Lorsque la couche perméable est horizontale, les plans iso- $\varpi$  doivent être inclinés sur l'horizontale d'un angle  $\varphi$  différent de zéro (Fig. 4).

(i) Si  $\varphi = \pi/2$ , il y aura deux types de conditions aux limites. Le premier type correspond à la première solution de l'équation (2.11) (voir Annexe: A.1.1). Les distributions des températures pariétales sont:

$$T_p^\pm(x) = (Pe^*/Ra^*) \left[ F(-x) \pm \frac{\alpha}{2} + \beta \right], \quad (2.41)$$

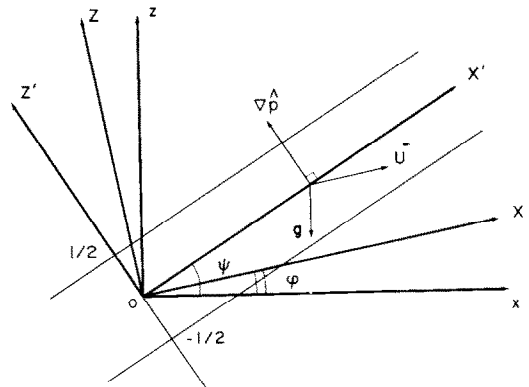


FIG. 3. Plans isobares inclinés.

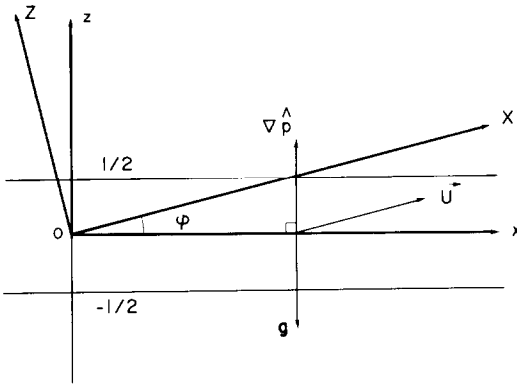


FIG. 4. Plans isobares horizontaux.

où  $F(-x)$  est la vitesse verticale donnée par les formules (A.3), (A.7) ou (A.11) selon que  $\alpha$  est positif, négatif ou nul.

Le second type correspond à la seconde solution de l'équation (2.11) (voir Annexe, A.1.2). D'après la formule (A.17), les distributions des températures pariétales sont uniformes, la vitesse étant uniforme et verticale et les surfaces isothermes étant des plans horizontaux.

(ii) Si  $\varphi$  est quelconque, les températures pariétales seront uniformes, la vitesse sera nulle et la température dans la couche sera une fonction linéaire de la cote  $z$  (voir A.1) ou une fonction exponentielle de la cote  $z$  (voir A.17).

### 3. CAS DES CYLINDRES VERTICAUX ISO- $\bar{\omega}$

#### 3.1. Description des solutions dans $R^3$

Maintenant, plaçons-nous dans le cas où les surfaces iso- $\bar{\omega}$  sont des cylindres à génératrices parallèles. A partir de l'équation (1.4), on voit qu'elles doivent être

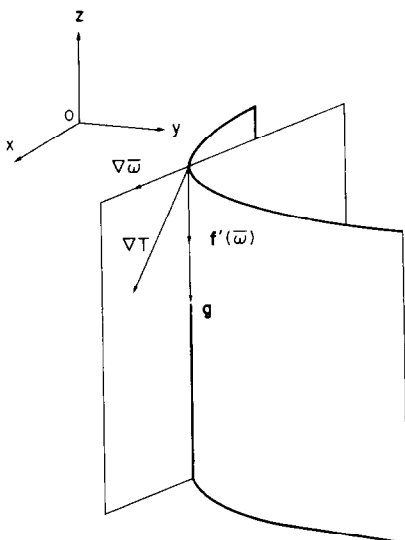


FIG. 5. Cylindre vertical iso- $\bar{\omega}$ .

verticales, car c'est le seul cas pour lequel les vecteurs  $\nabla \bar{\omega}$  et  $f'(\bar{\omega})$  peuvent se trouver dans le même plan vertical (Fig. 5).

Ce type d'écoulement se rencontre, par exemple, le long d'un cylindre vertical plongé dans un milieu poreux indéfini, à l'intérieur d'un cylindre vertical rempli de milieu poreux ou bien entre deux cylindres verticaux, tous ces cylindres étant imperméables. Il n'y a aucune raison pour que la vitesse de filtration soit uniforme sur ces cylindres limites. On verra plus loin que ce serait par contre le cas pour un cylindre circulaire isotherme ou pour deux cylindres circulaires coaxiaux isothermes.

L'équation (1.4) devient :

$$(dU_z/d\bar{\omega}) \partial \bar{\omega} / \partial x = -(Ra^*/Pe^*) \partial T / \partial x, \quad (3.1)$$

$$(dU_z/d\bar{\omega}) \partial \bar{\omega} / \partial y = -(Ra^*/Pe^*) \partial T / \partial y.$$

L'équation de la chaleur (4.2) du Chapitre I se simplifie car les composantes horizontales de la vitesse de filtration sont supposées nulles pour simplifier :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - Pe^* U_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

De façon générale, l'intégration des deux équations du système (3.1) nous donne une relation linéaire entre la vitesse et la température :

$$U_z = -\frac{Ra^*}{Pe^*} T + h(z), \quad (3.3)$$

où  $h(z)$  est une fonction indéterminée pour le moment.

L'équation (3.2) devient alors :

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = h'' - Pe^* U_z h'. \quad (3.4)$$

Comme dans le paragraphe 2 sur les plans parallèles, l'équation de la chaleur (3.4) aura deux solutions.

3.1.1. La première solution de l'équation aux dérivées partielles (3.4) sera de la forme :

$$U_z(\bar{\omega}) = C_1, \quad (3.5)$$

où  $C_1$  est une constante.

La fonction  $h(z)$  sera solution de l'équation différentielle suivante :

$$h'' - Pe^* C_1 h' = 0. \quad (3.6)$$

(a) Si la constante  $C_1$  est différente de zéro, la fonction  $h(z)$  sera une fonction exponentielle. La température est de la même forme, tandis que la vitesse de filtration est verticale et uniforme dans le sens opposé au gradient de température.

(b) Lorsque la constante  $C_1$  est nulle, la fonction  $h(z)$  sera une fonction linéaire de même que la température. Dans ce cas, le gradient de température sera uniforme et vertical.

3.1.2. La seconde solution de l'équation aux dérivées partielles (3.4) sera de la forme :

$$h(z) = D_1 z + D_2, \quad (3.7)$$

où  $D_1$  et  $D_2$  sont des constantes.

La fonction  $U_z(\varpi)$  obéira à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = -Pe^* D_1 U_z. \quad (3.8)$$

La composante verticale de la vitesse de filtration  $U_z(x, y)$  obéira donc à une équation de Helmholtz (ou équation des membranes vibrantes).

La composante verticale du gradient de température est uniforme et les surfaces isothermes couperont les plans horizontaux selon des courbes iso- $\varpi$ .

### 3.2. Frontières imperméables

Si l'on veut utiliser les solutions données dans le paragraphe 3.1, il faut que le domaine qui nous intéresse soit limité par des frontières imperméables qui soient des cylindres à génératrices verticales.

3.2.1. *Cylindres verticaux.* Dans ce cas, nous nous imposerons sur  $n$  cylindres verticaux des distributions de températures pariétales,

(a) soit du type :

$$T_{pi}(z) = (Pe^*/Ra^*)[h(z) - C_1], \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.9)$$

$h(z)$  étant solution de l'équation (3.6), c'est-à-dire une fonction exponentielle ou linéaire de la cote  $z$ ;

(b) soit du type :

$$T_{pi}(s_i, z) = E_i(s_i) + (Pe^*/Ra^*) \times (D_1 z + D_2), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.10)$$

c'est-à-dire la somme d'une fonction linéaire de la cote  $z$  et d'une fonction de l'abscisse curviligne  $s_i$  de la section droite du cylindre considéré.

3.2.2. *Couche à parois planes parallèles verticales.* Si les  $n$  cylindres verticaux se réduisent à deux plans verticaux parallèles, le domaine poreux est alors une couche à parois parallèles verticales imperméables, cas de figure déjà envisagé au sous-paragraphe 2.2.1, mais avec l'angle  $\psi$  égal à  $\pi/2$ .

Le type de solution aux conditions aux limites (3.9) correspond à la solution de la section 2.2.1.2, c'est-à-dire celle de la couche perméable inclinée à parois imperméables lorsque  $\psi = \pi/2$ , avec des distributions de températures pariétales exponentielles.

Le type de solution avec les conditions aux limites (3.10) est plus général que la solution de la section 2.2.1.1, car le champ de température est fonction non seulement de  $z$  mais de  $y$ . Lorsque les fonctions  $E_1(y)$  et  $E_2(y)$  des conditions aux limites (3.10) sont des constantes, les distributions de températures pariétales sont des fonctions linéaires de  $z$  et l'on retombe sur la solution de la section 2.2.1.1.

3.2.3. *Symétrie de révolution.* Si les frontières imperméables sont un ou deux cylindres circulaires dont les températures pariétales sont une fonction exponentielle ou linéaire de la cote  $z$ , on aura un champ de température et un champ de vitesse de filtration de révolution.

Il y a trois géométries intéressantes dans la pratique :

- (i) le cylindre circulaire poreux vertical;
- (ii) l'extérieur d'un trou circulaire vertical dans un milieu poreux indéfini;
- (iii) l'espace annulaire poreux vertical.

### 3.3. Frontières isobares

On a vu plus haut que les surfaces isobares étaient des plans horizontaux. Les domaines limités par des surfaces isobares et dont les champs de vitesse de filtration et de température sont des solutions avec hodographe linéaire sont le milieu semi-infini à paroi horizontale et les couches à parois horizontales.

(a) Dans le cas de la première solution, les plans horizontaux limitant le milieu semi-infini et la couche sont isothermes.

(b) Dans le cas de la seconde solution, les plans horizontaux limitant le milieu semi-infini et la couche ont, comme distributions de température, des fonctions de  $x$  et de  $y$  solutions d'une équation de Helmholtz.

## 4. CONCLUSION

On a montré que, grâce à l'hypothèse d'un hodographe linéaire, les équations de la convection naturelle dans un milieu poreux possèdent des solutions particulières dont l'hodographe est une droite ou un segment de droite.

On peut appliquer ces solutions particulières au cas d'une couche perméable avec différentes conditions dynamiques et thermiques résumées sur le tableau 1.

On peut également obtenir d'autres applications au cas de cylindres perméables verticaux pleins ou creux avec un ou plusieurs trous verticaux à parois imperméables, ainsi qu'au cas de couches perméables à parois horizontales isobares avec un ou plusieurs trous verticaux à parois imperméables.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. Bories and M. A. Combarous, Natural convection in a sloping porous layer, *J. Fluid Mech.* **57**, 63-79 (1973).
2. J. E. Weber, Convection in a porous medium with horizontal and vertical temperature gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 241-248 (1974).
3. B. Le Fur, Solutions particulières à un paramètre des équations stationnaires de Navier-Stokes, *Mech. Res. Comm.* **5**(6), 361-367 (1978).

## ANNEXE

### RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR DANS LE CAS OU LES SURFACES ISO- $\varpi$ SONT DES PLANS PARALLELES

#### A.1. Plans inclinés

Il est facile de voir que l'équation aux dérivées partielles (2.11) possède deux solutions.

A.1.1. Une première solution sera de la forme :

$$G(z) = \alpha z + \beta, \quad (A.1)$$

Tableau 1. Distributions des températures pariétales des couches perméables

	Parois imperméables	Parois isobares
Couche horizontale	Linéaires en $x$ (§2.2.2).	Trigonométriques, hyperboliques ou linéaires en $x$ (§2.3.2.); uniformes (§2.3.2. et §3.3.); fonctions de $x$ et de $y$ , solutions d'une équation de Helmholtz (§3.3.).
Couche inclinée	Linéaires en $X$ (§2.2.1.); exponentielles en $X$ (§2.2.1.2)	Uniformes (§2.3.1.1.).
Couche verticale	Linéaires en $z$ (§2.2.1.1); exponentielles en $z$ (§2.2.1.2); linéaires en $z$ + fonctions de $y$ (§3.2.2).	Uniformes (§2.3.1.1.).

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes.

La fonction  $F(Z)$  est alors solution de l'équation différentielle suivante:

$$F'' - Pe^* \alpha \sin^2 \varphi - F = 0. \quad (A.2)$$

Si  $\alpha > 0$ , la fonction  $F(Z)$  sera une somme d'exponentielles:

$$F(Z) = A_+ e^{\tilde{r}Z} + A_- e^{-\tilde{r}Z}, \quad (A.3)$$

où  $A_+$  et  $A_-$  sont des constantes et où:

$$\tilde{r} = \sin \varphi (\alpha Pe^*)^{1/2}. \quad (A.4)$$

Le champ de température  $T(X, Z)$  s'écrira:

$$T(X, Z) = (Pe^*/Ra^*) [(A_+ e^{\tilde{r}Z} + A_- e^{-\tilde{r}Z})/\sin \varphi + \alpha(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \beta]. \quad (A.5)$$

A partir de la formule (2.12), on peut calculer, à une constante près, la pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$ :

$$\hat{p}(X, Z) = \alpha(X \sin \varphi + Z \cos \varphi)^2/2 + \beta(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \cot \varphi (A_+ e^{\tilde{r}Z} - A_- e^{-\tilde{r}Z})/\tilde{r} + \gamma, \quad (A.6)$$

où  $\gamma$  est une constante d'intégration.

Si  $\alpha < 0$ , la fonction  $F(Z)$  sera une somme de fonctions trigonométriques:

$$F(Z) = \tilde{p} \sin \tilde{t}Z + \tilde{q} \cos \tilde{t}Z, \quad (A.7)$$

où  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  sont des constantes et où:

$$\tilde{t} = \sin \varphi (-\alpha Pe^*)^{1/2}. \quad (A.8)$$

Le champ de température  $T(X, Z)$  s'écrira:

$$T(X, Z) = \frac{Pe^*}{Ra^*} [(\tilde{p} \sin \tilde{t}Z + \tilde{q} \cos \tilde{t}Z)/\sin \varphi + \alpha(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \beta]. \quad (A.9)$$

La pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$  a pour expression:

$$\hat{p}(X, Z) = \alpha(X \sin \varphi + Z \cos \varphi)^2/2 + \beta(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \cot \varphi (-\tilde{p} \cos \tilde{t}Z + \tilde{q} \sin \tilde{t}Z)/\tilde{t} + \gamma. \quad (A.10)$$

Si  $\alpha = 0$ , la fonction  $F(Z)$  sera une fonction linéaire:

$$F(Z) = B_1 Z + B_2, \quad (A.11)$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont des constantes.

Le champ de température  $T(X, Z)$  s'écrira:

$$T(X, Z) = \frac{Pe^*}{Ra^*} \left[ \frac{1}{\sin \varphi} (B_1 Z + B_2) + \beta \right]. \quad (A.12)$$

La pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$  a pour expression:

$$\hat{p}(X, Z) = \beta(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \cot \varphi (B_1 Z^2/2 + B_2 Z) + \gamma. \quad (A.13)$$

Lorsque la vitesse est partout nulle, la température sera uniforme et les surfaces isobares seront des plans horizontaux.

A.1.2. La seconde solution de l'équation aux dérivées partielles (2.11) est:

$$F(Z) = \delta, \quad (A.14)$$

où  $\delta$  est une constante.

La fonction  $G(z)$  est solution de l'équation différentielle suivante:

$$G'' \sin \varphi - Pe^* \delta \sin^2 \varphi G' = 0. \quad (A.15)$$

On en tire:

$$G(z) = C \exp(Pe^* \delta \sin \varphi z) + D, \quad (A.16)$$

où  $C$  et  $D$  sont des constantes. Les surfaces isothermes sont alors des plans horizontaux, comme on le voit sur la formule:

$$T(X, Z) = \frac{Pe^*}{Ra^*} [\delta/\sin \varphi + C \exp[Pe^* \delta \sin \varphi (X \sin \varphi + Z \cos \varphi)] + D]. \quad (A.17)$$

La pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$  est obtenue à partir de la formule (2.12):

$$\hat{p}(X, Z) = C \exp[Pe^* \delta \sin \varphi (X \sin \varphi + Z \cos \varphi)]/Pe^* \delta \sin \varphi + \delta \cot \varphi Z + D(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \varepsilon, \quad (A.18)$$

où  $\varepsilon$  est une constante d'intégration.

Lorsque la vitesse  $\delta$  est nulle, on aura:

$$G(z) = \tilde{E}z + \tilde{F}, \quad (A.19)$$

où  $\tilde{E}$  et  $\tilde{F}$  sont des constantes.

Le champ de température  $T(X, Z)$  s'écrira:

$$T(X, Z) = \frac{Pe^*}{Ra^*} [\tilde{E}(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \tilde{F}]. \quad (A.20)$$

On voit que le gradient de température est uniforme et vertical (conduction pure). La première solution, lorsque les constantes  $\alpha$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont nulles est un cas particulier de la seconde solution lorsque la vitesse  $\delta$  est nulle.

La pression motrice  $\hat{p}(X, Z)$  a pour expression:

$$\hat{p}(X, Z) = \frac{\tilde{E}}{2} (X \sin \varphi + Z \cos \varphi)^2 + \tilde{F}(X \sin \varphi + Z \cos \varphi) + \varepsilon. \quad (A.21)$$

On voit que les surfaces isobares seront des plans horizontaux.



## A.2. Plans horizontaux

Lorsque les surfaces iso- $\varpi$  sont des plans horizontaux ( $\varphi = 0$ ), comme sur la Fig. 2, l'équation (2-3) deviendra :

$$F'(z) = -\frac{Ra^*}{Pe^*}(\partial T/\partial x)_z. \quad (A.22)$$

En intégrant (A.22) par rapport à l'abscisse  $x$ , on obtient :

$$xF'(z) = -\frac{Ra^*}{Pe^*}T(x, z) + H(z). \quad (A.23)$$

L'équation de la chaleur sous la forme (4.2) du Chapitre I s'écrit alors :

$$xF'' - H'' - Pe^* FF' = 0. \quad (A.24)$$

Cette équation n'a de sens que si :

$$F'' = 0, \quad (A.25)$$

d'où :

$$F(z) = az^2 + bz + c, \quad (A.26)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

La fonction  $H(z)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$H'' = -FF'Pe^*. \quad (A.27)$$

D'où :

$$H' = -\frac{Pe^*}{2}(F^2 + d), \quad (A.28)$$

où  $d$  est une constante.

En intégrant (A.27), on trouve que la fonction  $H(z)$  est un polynôme du cinquième degré :

$$H(z) = -\frac{Pe^*}{2} \left[ \frac{a^2}{5} z^5 + \frac{ab}{2} z^4 + \frac{(b^2 + 2ac)}{3} z^3 + bc z^2 + (c^2 + d)z + e \right], \quad (A.29)$$

où  $e$  est une constante d'intégration.

On voit que l'équation aux dérivées partielles (A.24) n'a qu'une solution, et que le champ de température est :

$$T(x, z) = -\frac{Pe^*}{Ra^*} [x(2az + b) - H(z)]. \quad (A.30)$$

Sur chaque plan horizontal, le température est fonction linéaire de  $x$ .

Le gradient de pression motrice donné par la formule (3.6) du Chapitre I devient :

$$\nabla \hat{p} = xF'(z) + z[xF'(z) - H(z)]. \quad (A.31)$$

Si l'on intègre (A.31), on obtiendra :

$$\hat{p}(x, z) = xF(z) - \int_0^z H(z) dz + \xi, \quad (A.32)$$

où  $\xi$  est une constante d'intégration.

Les surfaces isobares sont des cylindres à génératrices parallèles à l'axe des  $y$ , dont les sections droites ont comme équation une fraction rationnelle.

Ce seront des plans inclinés, si les cinq constantes de la formule (A.29) obéissent aux conditions suivantes :

$$a=b=0, \quad c \neq 0, \quad d = -c^2 \quad \text{et} \quad e \neq 0. \quad (A.33)$$

## LINEAR HODOGRAPH SOLUTIONS OF NATURAL CONVECTION EQUATIONS IN A POROUS MEDIUM

**Abstract**—If we suppose that the filtration velocity in a porous medium with buoyancy is a function of only one parameter (linear hodograph), the isovelocity surfaces will be parallel planes or cylinders with vertical generatrices. This allows to obtain, for instance, particular solutions in the case of a sloped or horizontal layer with impervious or isobaric walls and with certain thermal conditions.

## LINEARE HODOGRAPHENLÖSUNGEN FÜR GLEICHUNGEN DER FREIEN KONVEKTION IN EINEM PORÖSEN MEDIUM

**Zusammenfassung** — Wenn man annimmt, daß die Filtriergeschwindigkeit in einem porösen Medium bei Auftrieb eine Funktion von nur einem Parameter (linearer Hodograph) ist, werden die Flächen gleicher Geschwindigkeit parallele Ebenen oder Zylinder mit vertikalen Erzeugenden sein. Hierdurch ist es möglich, zum Beispiel im Falle einer geneigten oder horizontalen Schicht mit undurchlässigen oder isobaren Wänden für bestimmte thermische Bedingungen partikuläre Lösungen zu erhalten.

## РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ЛИНЕЙНОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

**Аннотация** — Если предположить, что скорость фильтрации в пористой среде под действием подъемной силы является функцией только одного параметра (годограф вектора скорости является линейным), то изоповерхности вектора скорости будут представлять собой параллельные плоскости или цилиндры с вертикальными образующими. Тогда можно получить частные решения для наклонного или горизонтального слоя с непроницаемыми или изобарическими стенками при заданных тепловых условиях.